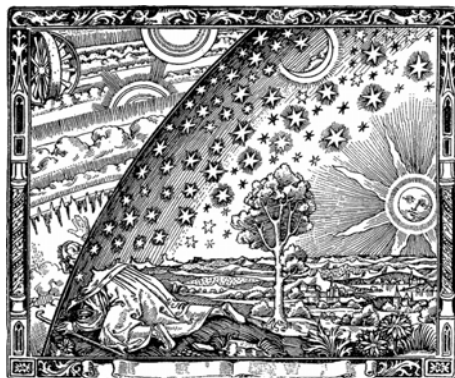




А.И. Слободянюк
А.А. Мищук
В.И. Анцулевич
Л.Г. Маркович

**Республиканская
 физическая
 олимпиада
 (III этап)
 2012 год**

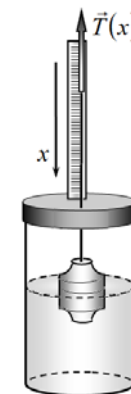


Теоретический тур

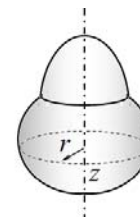
**Условия задач.
 11 класс**

Задача 1. Новые Архимеды.

Молодой, но талантливый физик Федор (далее Федя), после просмотра программы «Что? Где? Когда?» решил сочинить собственный вопрос-задачу с черным ящиком – как, не заглядывая внутрь, определить что там находится. Идея пришла сразу –



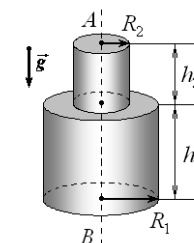
нужен «гидравлический черный ящик». Возьмем большую бочку, наполовину заполненную водой, и закроем ее крышкой с маленьким отверстием. Через отверстие пропустим прочную нить, к которой снизу прикрепим некоторое тело. Сверху с помощью чувствительного динамометра будем измерять силу натяжения нити, постепенно опуская и поднимая ее. Измеряя тем самым зависимость силы натяжения $T(x)$ от координаты верхнего конца нити. Для ее измерения прикрепим к крышке бочки вертикальную линейку. Причем можно провести два измерения – при опускании и при подъеме тела! Можно ли по измеренной зависимости $T(x)$ восстановить форму тела? Подумавши, Федя решил, что эта задача не имеет однозначного решения. Поэтому ввел дополнительное условие – тело должно быть осесимметричным! Уж в этом случае задача должна иметь решение при условии, что ось тела все время остается вертикальной.



Тем более, что форма осесимметричного тела определяется одной функцией – зависимостью радиуса от высоты над низом тела $r(z)$.

Решено – сделано! Федор приступает к апробации своей идеи. Соединяет два сплошных металлических цилиндра, прикрепляет сверху прочную бечевку и ... решает провести сначала теоретические расчеты. Измеряет размеры:

$R_1 = 10,0 \text{ см}$, $R_2 = 5,0 \text{ см}$, $h_1 = 15 \text{ см}$, $h_2 = 10 \text{ см}$,
 Измеряет массу $m = 20 \text{ кг}$. Далее рассчитывает (естественно полагая, что $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, а плотность воды равна $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$) и строит график зависимости силы натяжения веревки от координаты верхней точки веревки.

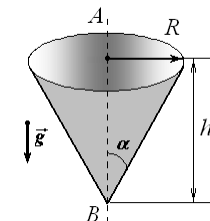


Вопрос 1.

Постройте график зависимости силы натяжения веревки от координаты верхней точки веревки. Считайте, что сила натяжения стала изменяться после того, как веревка опустилась до $x_0 = 5,0 \text{ см}$.

Проведя эксперимент, Федя убедился, экспериментальные данные в пределах погрешности совпали с результатами расчетов. «Может провести эксперимент, поднимая груз со дна?» - подумал Федя и тут же отбросил эту идею – ничего нового не получится!

Далее Федор решил усложнить задачу – больно уж простой получилась зависимость. Во втором эксперименте Федя использовал сплошной конус высотой $h = 17 \text{ см}$ с углом



полураствора $\alpha = 20^\circ$, измеренная масса конуса равна $m = 7,5 \text{ кг}$.

Вопрос 2.

Постройте график зависимости силы натяжения нити $T(x)$ от координаты x для этого эксперимента.

И этот эксперимент подтвердил проведенные расчеты.

Вдохновленный успехом, Федор решил разработать общую теорию решения обратной задачи – как по измеренной зависимости $T(x)$ восстановить форму тела $r(z)$? Оказалось, что задача имеет решение в общем виде!

Вопрос 3.

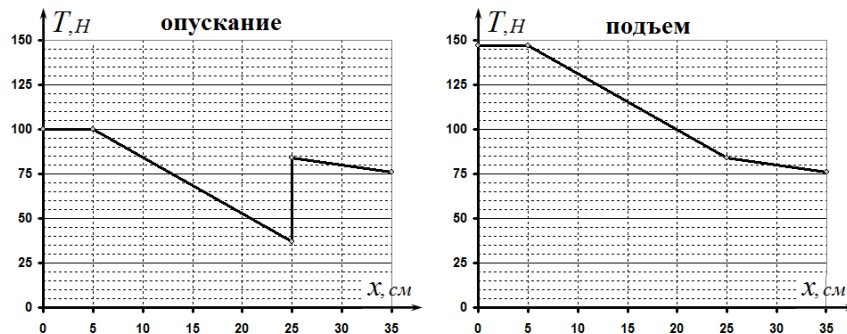
Допустим, что вам известен точный вид зависимости силы натяжения веревки $T(x)$. Выразите в общем виде функцию, описывающую форму тела $r(z)$.

Придя в восторг от полученных достижений, Федя решил продемонстрировать свое открытие другу Васе. Он подробно объяснил суть дела и предложил Васе самостоятельно, в тайне, изготовить любое осесимметричное тело (только такое, чтобы оно тонуло в воде), привязать его к веревке, опустить в бочку, просунув конец веревки через отверстие в крышке. Хитрый Вася согласился и всего через пять минут закончил все подготовительные работы, и предложил Феде провести свой эксперимент.

После тщательных измерений Федя построил график зависимости силы натяжения веревки от ее координаты. «Тоже мне друг называется!» - подумал Федя взглянув на график. И решил провести измерения при подъеме того же тела. Через несколько минут и второй график был готов!

Полученные графики показаны на рисунке.

«Эврика!» - воскликнул Федя и рассказал Васе, какое тело он изготовил и поместил в прибор.

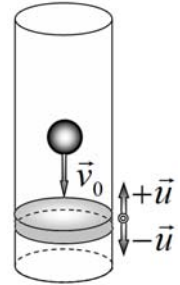


Вопрос 4.

Определите Форму тела, которое сделал Вася, найдите его размеры.

Задача 2. Резонанс

Внизу очень высокого цилиндра колеблется тяжелая платформа. Платформа движется вверх и вниз с постоянной по модулю скоростью $\pm u$ и с некоторым периодом T . Время торможения и разгона платформы пренебрежимо малы, т. е. можно считать, что, достигая нижнего или верхнего положения, платформа мгновенно изменяет скорость на противоположную.



На платформу с некоторой высоты h падает маленький шарик. Непосредственно перед столкновением с платформой шарик движется вниз с некоторой скоростью v , а сам поршень находится в крайнем нижнем положении и движется вверх (см. рис.).

Возможна ситуация, при которой шарик в процессе движения всегда ударяется о платформу, находящуюся в одном и том же (описанном выше) положении, и при этом всегда приобретает дополнительную скорость.

1. Покажите, что при заданной скорости u такая ситуация возможна, только если период колебаний платформы и скорость, с которой шарик подлетает к платформе, удовлетворяют следующим условиям:

$$T = A/m \text{ и } v = B \frac{n}{m}, \text{ где } n, m \in \mathbb{N}.$$

Пусть $u = 0.5 \text{ м/с}$, а $g = 10 \text{ м/с}^2$.

2. Найдите численные значения A и B .

В задаче рассматривается только случай, когда скорость шарика гораздо больше скорости платформы $v \gg u$ ($v \geq 10u$) и высота, на которую поднимается шарик, намного больше амплитуды колебаний платформы. Последнее условие сформулируем следующим образом: $uT \ll h$ ($uT \leq h/10$).

3. Как должны быть связаны числа n и m , чтобы эти условия выполнялись?

4. Определите значение наименьшей «резонансной» скорости v_0 , которой может обладать подлетающий к платформе шарик, а также интервал Δv между двумя резонансными скоростями для $m=1$, $m=2$ и $m=10$.

Рассмотрим более подробно поведение шарика, подлетающего к платформе с резонансной скоростью v_0 при $m=1$.

5. Определите моменты времени i -го касания шарика и платформы, а также максимальную высоту подъема шарика после i -го касания.

6. Изобразите схематически зависимость координаты шарика от времени (обозначьте характерные точки: моменты удара, максимальные высоты).

Пусть скорость v шарика отличается от резонансной на величину δv ($v = v_0 + \delta v$)

Рассмотрите только случай, когда $v_0 < v < v_0 + \frac{\Delta v}{2}$.

7. Через какое количество ударов процесс увеличения высоты подъема сменится уменьшением? Выразите это время через отношение $\delta v / \Delta v$.

8. Какое время будет продолжаться разгон и на какую максимальную высоту $h\left(\frac{\delta v}{\Delta v}\right)$ сможет подняться этот шарик?

9. Нарисуйте качественный график зависимости $h\left(\frac{\delta v}{\Delta v}\right)$.

10. Полученное в п. 8 значение высоты является несколько заниженным, т.к. сама платформа находится в различных положениях при каждом следующем ударе. Оцените ошибку $\Delta h\left(\frac{\delta v}{\Delta v}\right)$ определения максимальной высоты подъема.



Задача 1. «Railgun»

*Программа СОИ США сосредоточила публичное внимание на электромагнитных пушках...
М. Леффлер*

Электромагнитные пушки давно заполнили компьютерные игры, боевики ... и даже являются объектами серьезных научных и инженерных исследований. Нам не кажется, что за отведенное Вам время, Вы сможете предложить принципиально новые принципы создания такого оружия. Но, Вы обязаны продемонстрировать свои знания и способности в объяснении и описании основных принципов устройства такого оружия.

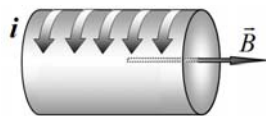
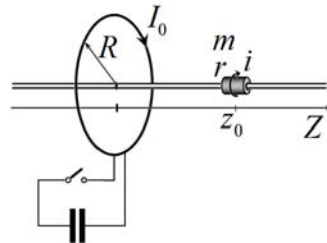
Основная идея разгона снарядов заключается во взаимодействии снаряда с магнитным полем, создаваемым системой катушек, по которым пропускаются сильные импульсы электрического тока.

Вам предстоит рассмотреть простейший вариант – система катушек заменяется на одну, которая, в свою очередь, рассматривается как круговой виток радиуса R с током, силу которого будем обозначать I_0 . Для производства выстрела кольцо подключают к батарее конденсаторов суммарной емкостью C , заряженной до напряжения U_0 . Электрическое сопротивление кольца обозначим Y (чтобы не путать с его радиусом), индуктивностью кольца можно пренебречь.

Излучением электромагнитных волн во всех случаях следует пренебрегать.

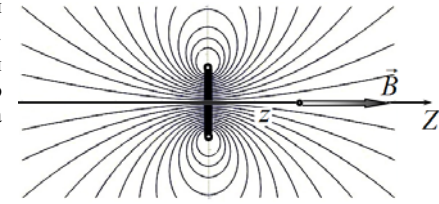
Вдоль оси витка расположен тонкий, длинный, гладкий, непроводящий и немагнитный стержень. Со стержнем совместим ось координат Oz , начало которой находится в центре кольца.

Вдоль стержня может скользить без трения цилиндрический снаряд массы m . Размеры снаряда – его радиус r и длина l , значительно меньше радиуса витка R . Во всех случаях, электромагнитные свойства снаряда моделируются проводящим круговым витком, в котором протекает, или может протекать электрический ток, силу которого будем обозначать i . Магнитные свойства снаряда будут варьироваться по ходу задачи.



Магнитное поле, создаваемое круговым током I_0 описывается достаточно сложно. Однако, на оси кольца вектор индукции магнитного поля направлен вдоль этой оси, а его модуль на расстоянии z от центра кольца определяется по формуле

$$B_z = \frac{\mu_0 I_0}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

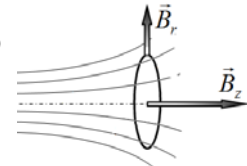


Часть 0. (Тоже оценивается!)

0.1 Покажите, что в осесимметричном магнитном поле при изменении осевой компоненты индукции поля $B_z(z)$ неизбежно существование радиальной компоненты поля, которая на малом расстоянии r от оси может быть рассчитана по формуле

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}, \quad (2)$$

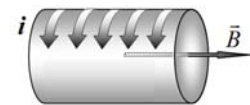
где $\frac{dB_z}{dz}$ - производная от осевой компоненты по координате.



0.2 Найдите зависимость радиальной компоненты поля кругового тока в зависимости от координаты z и расстояния до оси $B_r(z, r)$.

Часть 1. Снаряд – постоянный магнит.

Снаряд пушки представляет собой постоянный магнит (в состоянии полной намагниченности). Это значит, что его магнитные свойства моделируются постоянным круговым током силой i , протекающим по его боковой поверхности. Сила этого тока не зависит от индукции внешнего магнитного поля.



1.1 Пусть снаряд покоится и находится на расстоянии z_0 от центра кольца, по которому протекает постоянный ток силой I_0 . Найдите силу, действующую на снаряд со стороны магнитного поля. Постройте график зависимости этой силы от расстояния до центра кольца.

1.2 Какую максимальную скорость может приобрести снаряд при выстреле в описанных выше условиях при разрядке конденсатора?

Считайте, что смещением снаряда за время прохождения тока по кольцу можно пренебречь.

1.3 В какую сторону полетит снаряд и как изменится его направление полета, если не изменяя первоначального положения снаряда, изменить полярность подключения батареи?

Часть 2. Снаряд – магнетик.

Рассмотрим теперь поведение снаряда из магнитномягкого железа. В этом случае в магнитном поле снаряд намагничивается, причем можно считать, что его намагниченность пропорциональна индукции внешнего поля (то есть можно пренебречь эффектами насыщения и остаточной намагниченности). Иными словами, магнитные свойства снаряда моделируются круговым током, текущим по боковой поверхности, сила которого пропорциональна индукции внешнего поля B_0 , направленного по оси снаряда

$$i = \chi B_0. \quad (3)$$

Считайте, что χ - известная константа.

2.1 Пусть снаряд покоится и находится на расстоянии z_0 от центра кольца, по которому протекает постоянный ток силой I_0 . Найдите силу, действующую на снаряд со стороны магнитного поля.

2.2 Рассчитайте, какую максимальную скорость может приобрести снаряд в этом случае.

2.3 В какую сторону полетит снаряд и как изменится его направление полета, если не изменяя первоначального положения снаряда, изменить полярность подключения батареи?

Часть 3. Снаряд – катушка индуктивности.

Рассмотрим теперь снаряд, изготовленный из немагнитного материала, на внешнюю поверхность которого намотана закороченная на себя катушка, индуктивность которой равна L . Электрическим сопротивлением катушки можно пренебречь.

3.1 Рассчитайте, какую максимальную скорость может приобрести снаряд в этом случае.

3.2 В какую сторону полетит снаряд и как изменится его направление полета, если не изменяя первоначального положения снаряда, изменить полярность подключения батареи?

Решения задач. 11 класс.

Задача 11.1. Новые Архимеды.

Вопрос 1.

Пока тело не начал опускаться в воду (для x от нуля до 5,0 см), сила натяжения нити равна силе тяжести, действующей на тело:

$$T_0 = mg = 2,0 \cdot 10^2 \text{ Н} \quad (1)$$

При частичном погружении, на тело начинает действовать сила Архимеда, которая уменьшает силу натяжения веревки. Пока нижний цилиндр полностью не погрузился в воду (для x от 5,0 см до 20 см) сила натяжения будет определяться по формуле

$$T = T_0 - \rho g(x - x_0) \cdot \pi R_1^2. \quad (2)$$

При полном погружении нижнего цилиндра сила натяжения становится равной

$$T_1 = T_0 - \rho g h_1 \cdot \pi R_1^2 = 1,53 \cdot 10^2 \text{ Н}. \quad (3)$$

После начала погружения верхнего цилиндра (при x от 20 см до 30 см) сила натяжения будет уменьшаться медленнее, так как радиус этого цилиндра меньше:

$$T = T_0 - \rho g(x - x_0 - h_1) \cdot \pi R_2^2. \quad (4)$$

При полном погружении тела сила натяжения уменьшится до величины

$$T_2 = T_1 - \rho g h_2 \cdot \pi R_2^2 = 1,45 \cdot 10^2 \text{ Н} \quad (5)$$

График этой зависимости показан на рисунке.

Вопрос 2.

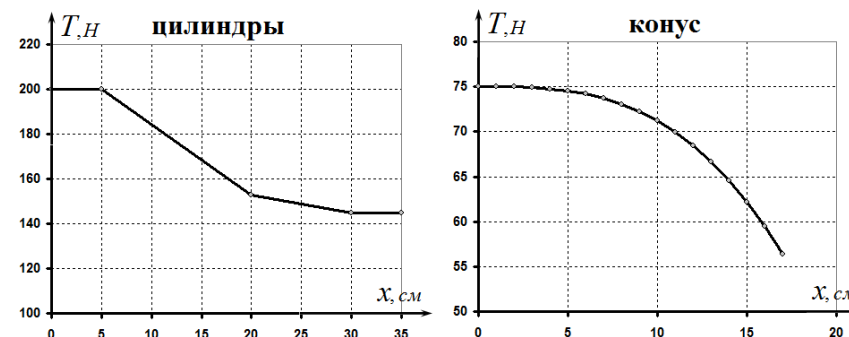
При погружении конуса сила натяжения веревки будет изменяться по закону

$$T = mg - \frac{1}{3} \rho g \pi x^3 \operatorname{tg}^2 \theta. \quad (6)$$

Для построения графика подставим численные значения:

$$T = 75 - 3,8 \cdot 10^{-3} x^3, \quad (7)$$

где x - в сантиметрах, T - в ньютонах. График показан на рисунке.



Вопрос 3.

При погружении на малую величину Δx сила Архимеда изменяется на величину

$$\Delta F = \rho g \Delta V = \pi \rho g r^2 \Delta x, \quad (8)$$

где $\Delta V = \pi r^2 \Delta x$ - изменение объема погруженной части. На столько же уменьшается сила натяжения нити, поэтому

$$\Delta T = -\pi \rho g r^2 \Delta x. \quad (9)$$

Из этого уравнения находим искомую формулу

$$r(x) = \sqrt{-\frac{1}{\pi \rho g} \frac{dT}{dx}}, \quad (10)$$

где $\frac{dT}{dx}$ - производная от силы натяжения нити по координате.

Заметим, что практическое применение этой формулы к экспериментальным данным затруднительно, так численный расчет производных выполняется с большими ошибками.

Часть 4.

Вася поместил цилиндр в легкую консервную банку, которая при опускании заполнилась водой, чем и объясняются полученные и графики и своеобразный «гистерезис» - различие между зависимостями при подъеме и при опускании.

Радиус банки примерно равен 10 см, ее высота 20 см, радиус вставленного цилиндра примерно 5 см.

Задача 11.2. Резонанс

1. После столкновения шарик получает дополнительную скорость $2u$.

Следующее соударение произойдет через:

$$\Delta t = 2 \frac{v+2u}{g} = \frac{2v}{g} + \frac{4u}{g} \quad (1)$$

И это время должно быть кратным периоду после любого количества соударений. Это может быть, только если каждое из слагаемых выражения (1) кратно периоду:

$$\frac{4u}{g} = Tm \quad (2),$$

$$\frac{2v}{g} = Tn \quad (3).$$

Из равенства (2) следует:

$$T = \frac{4u/g}{m} = A/m \quad (4).$$

Подставляя значение периода в выражение (3), получим:

$$v = 2u \frac{n}{m} = B \frac{n}{m} \quad (5)$$

2. Численные значения A и B :

$$A = 0.2c \quad (6)$$

$$B = 1.4/c \quad (7)$$

3. Подставляя значения периода и скорости (4), (5) в условия $v \geq 10u$ и $uT \leq h/10$,

запишем в виде ($h = \frac{v^2}{2g}$):

$$\frac{n}{m} \geq 5 \quad (8)$$

$$\frac{0.1}{m} \leq \frac{1}{10} \frac{1}{2 \cdot 10} \frac{n^2}{m^2} \quad (9)$$

Последнее условие можно записать в виде:

$$n \geq \sqrt{20} \sqrt{m} \quad (10).$$

Т.к. $\sqrt{20} < 5$, то последнее условие автоматически выполняется при условии (8).

Таким образом, числа n и m должны быть связаны условием:

$$n \geq 5m \quad (11)$$

4. При $m=1$ скорость (с учетом условия (11)) может принимать значения:

$$v = 5 \frac{M}{c}; 6 \frac{M}{c}; 7 \frac{M}{c} \dots \quad (12).$$

Для $m=2$ и $m=10$ аналогично:

$$v = 5 \frac{M}{c}; 5.5 \frac{M}{c}; 6 \frac{M}{c} \dots \quad (13),$$

$$v = 5 \frac{M}{c}; 5.1 \frac{M}{c}; 5.2 \frac{M}{c} \dots \quad (14).$$

Таким образом, минимальная резонансная скорость во всех случаях равна:

$$v_0 = 5M/c \quad (15)$$

А интервал между резонансными скоростями уменьшается и становится равным:

$$\Delta v = \frac{1}{m} \cdot m / c \quad (16)$$

5. После i столкновений скорость шарика будет равна:

$$v_i = v_0 + 2ui \quad (17)$$

Тогда высота подъема равна:

$$h_i = \frac{(v_0 + 2ui)^2}{2g} = \frac{(5 + i)^2}{20} \quad (18)$$

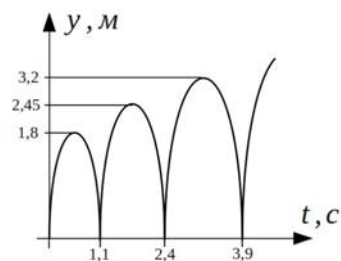
Промежуток времени между последовательными столкновениями:

$$\Delta t_i = 2 \frac{v_0 + 2ui}{g} \quad (19)$$

Тогда время i -го соударения:

$$t_i = \frac{2v_0}{g} i + \frac{2u}{g} i^2 = i + 0,1i^2 \quad (20)$$

6. Схематический график зависимости изображен на рисунке.



7. За время между ударами будет появляться сдвиг по времени, равный $\frac{2\delta v}{g}$. Процесс увеличения высоты подъема сменится уменьшением, когда сдвиг по времени станет равным половине периода, т.е. после

$$k = \frac{Tg}{4\delta v} \quad (21)$$

ударов.

Подставляя значение $T = \frac{0,2}{m} = 0,2\Delta v$, получим:

$$k = \frac{0,5}{\delta v / \Delta v} \quad (22)$$

8. Подставляя (22) в выражение (20), получим:

$$t_i = k + 0,1k^2 = \frac{0,5}{\delta v / \Delta v} + 0,1 \left(\frac{0,5}{\delta v / \Delta v} \right)^2 \quad (23)$$

$$h_i = \frac{(5+k)^2}{20} = \frac{\left(5 + \frac{0,5}{\delta v / \Delta v} \right)^2}{20} \quad (24)$$

9. Для оценки, можно считать, что при каждом ударе платформа находится на высоте равной амплитуде. Тогда за k ударов ошибка составит:

$$\Delta h = ak = \frac{T}{2} u \frac{0,5}{\delta v / \Delta v} = \frac{0,025}{\delta v / \Delta v} \quad (25)$$

Задача 11.1. «Railgun»

Часть 0.

0.1 Для расчета радиальной компоненты магнитного поля можно воспользоваться теоремой о магнитном потоке (или свойством замкнутости силовых линий магнитного поля), из которой следует, что магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Выделим тонкий цилиндр толщиной Δz и радиуса r , нижнее основание которого находится на расстоянии z от центра кольца, соосный с кольцом и применим теорему о магнитном потоке к поверхности этого цилиндра. Магнитный поток через нижнее основание равен (учтите, что вектора индукции и нормали здесь противоположны)

$$\Phi_1 = -B_z(z) \cdot \pi r^2,$$

где $B_z(z)$ - значение вертикальной компоненты вектора индукции на высоте z ;

поток через верхнее основание равен

$$\Phi_2 = B_z(z + \Delta z) \cdot \pi r^2,$$

где $B_z(z + \Delta z)$ - значение вертикальной компоненты вектора индукции на высоте $z + \Delta z$; поток через боковую поверхность (из осевой симметрии следует, что модуль радиальной составляющей вектора индукции B_r на этой поверхности постоянен):

$$\Phi_3 = B_r \cdot 2\pi r \Delta z.$$

Сумма этих потоков равна нулю, поэтому справедливо уравнение

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = -B_z(z) \cdot \pi r^2 + B_z(z + \Delta z) \cdot \pi r^2 + B_r \cdot 2\pi r \Delta z = 0,$$

из которого определим искомую величину

$$B_r = -\frac{r}{2} \cdot \frac{B_z(z + \Delta z) - B_z(z)}{\Delta z} = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dB_z(z)}{dz}. \quad (1)$$

0.2 Так как вид зависимости радиальной компоненты вектора индукции задан в условии задачи, то для расчета радиальной компоненты достаточно вычислить производную от этой функции

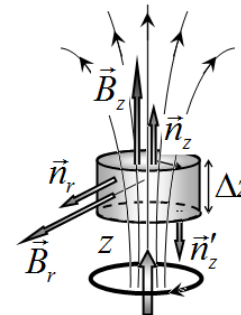
$$B_r = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dB_z(z)}{dz} = -\frac{r}{2} \cdot \frac{d}{dz} \left(\frac{\mu_0 I_0}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{3\mu_0 I_0 R^2 r}{4} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (2)$$

Часть 1. Снаряд – постоянный магнит.

1.1. Понятно, что сила, действующая на снаряд, определяется радиальной компонентой поля и по закону Ампера равна

$$F = 2\pi r i B_r = \frac{3\pi\mu_0 I_0 R^2 r^2 i}{2} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (3)$$

Для построения графика зависимость (3) удобно представить в виде



$$F = 2\pi r i B_r = \frac{3\pi\mu_0 I_0 r^2 i}{2R^2} \frac{\frac{z}{R}}{\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{5}{2}}} = F_1 \frac{\xi}{\left(1 + \xi^2\right)^{\frac{5}{2}}}, \quad (4)$$

где обозначено $F_1 = \frac{3\pi\mu_0 I_0 r^2 i}{2R^2}$.

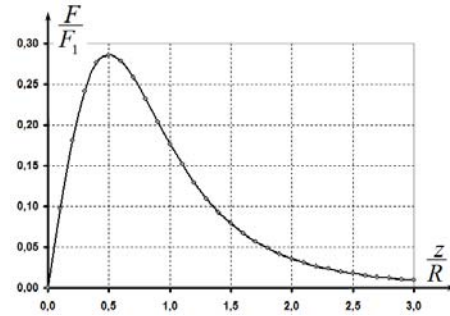


График этой функции теперь можно представить в относительных единицах, он показан на рисунке. Так как функция нечетная, то приведен график только для положительных значений z .

Максимум этой функции можно найти обычным способом. Найдем производную от функции (4) и приравняем ее к нулю

$$\left(\frac{\xi}{\left(1 + \xi^2\right)^{\frac{5}{2}}}\right)' = \frac{\left(1 + \xi^2\right)^{\frac{5}{2}} - \xi \cdot \frac{5}{2} \left(1 + \xi^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 2\xi}{\left(1 + \xi^2\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1 - 4\xi^2}{1 + \xi^2} = 0. \quad (5)$$

Из этого уравнения следует, что функция имеет экстремумы при $\xi^* = \pm \frac{1}{2}$, ее значение в максимуме равно

$$\left(\frac{F}{F_1}\right)_{\max} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{16}{25\sqrt{5}} \approx 0,29. \quad (6)$$

1.2 Для того, чтобы скорость снаряда была максимальна, его надо поместить в точку, где сила магнитного поля максимальна, то есть т.е. при $z_0 = \frac{R}{2}$. В этом случае эта сила пропорциональна току в кольце и равна

$$F = 2\pi r i B_r = \frac{48\pi\mu_0 r^2 i}{50\sqrt{5}R^2} I_0 = A_1 I_0. \quad (7)$$

Запишем уравнение второго закона Ньютона для снаряда

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = A_1 I_0 = A_1 \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (8)$$

Здесь сила тока представлена через величину электрического заряда, протекающего по катушке. С учетом того, что в начальный момент снаряд покоился, из уравнения (8) следует, что скорость снаряда пропорциональна заряду, протекшему по кольцу (причем она не зависит от временной зависимости силы тока):

$$v_{\max} = \frac{A_1}{m} q. \quad (9)$$

При разрядке батареи по кольцу пробежит весь заряд, накопленный в ней $q = CU_0$, поэтому

$$v_{\max} = \frac{A_1}{m} q = \frac{48\pi\mu_0 r^2 i}{50\sqrt{5}R^2 m} CU_0. \quad (10)$$

1.3 Как следует из полученной формулы, при изменении полярности батареи (изменении направления тока) направление полета снаряда изменится на противоположное.

Часть 2. Снаряд – магнетик.

Если снаряд находится на расстоянии z от центра кольца, то его намагниченность равна силе поверхностного тока

$$i = \chi B_z \quad (11)$$

Следовательно, на снаряд действует сила, модуль которой равен

$$F = 2\pi r i B_r = \frac{3\pi\mu_0 I_0 R^2 r^2}{2} \frac{z}{\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}} i = \frac{3\pi\mu_0 I_0 R^2 r^2}{2} \frac{z}{\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}} \chi \left(\frac{\mu_0 I_0}{2} \cdot \frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{3\pi\mu_0^2 I_0^2 R^4 r^2}{4} \chi \frac{z}{\left(R^2 + z^2\right)^4} = \frac{3\pi\mu_0^2 I_0^2 r^2}{4R^3} \chi \frac{\frac{z}{R}}{\left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^4} = \frac{3\pi\mu_0^2 I_0^2 r^2}{4R^3} \chi \frac{\xi}{\left(1 + \xi^2\right)^4} \quad (12)$$

Заметим, что эту силу можно представить в виде

$$F = 2\pi r B_r i = 2\pi r B_r \chi B_z = 2\pi r \chi B_z \left(-\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}\right) = -\pi r^2 \chi \frac{d(B_z^2)}{dz}. \quad (13)$$

Так как снаряд намагничивается по направлению внешнего поля, то между кольцом и снарядом всегда будет действовать сила притяжения, то есть снаряд будет двигаться к центру кольца.

Найдем расстояние z_0 , при котором сила притяжения будет максимальна. Для этого вычислим производную от функции (12) и приравняем ее к нулю

$$\left(\frac{\xi}{\left(1 + \xi^2\right)^4}\right)' = \frac{\left(1 + \xi^2\right)^4 - \xi \cdot 4\left(1 + \xi^2\right)^3 \cdot 2\xi}{\left(1 + \xi^2\right)^8} = \frac{1 - 7\xi^2}{\left(1 + \xi^2\right)^5} = 0. \quad (14)$$

Таким образом, максимум этой функции достигается при $\xi^* = \pm \frac{1}{\sqrt{7}}$ и равен

$$\left(\frac{\xi}{\left(1 + \xi^2\right)^4}\right)_{\max} = \frac{\frac{1}{\sqrt{7}}}{\left(1 + \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2\right)^4} = \frac{1}{\sqrt{7}} \left(\frac{7}{8}\right)^4 \approx 0,22. \quad (15)$$

Следовательно, максимальная сила, действующая на железный снаряд равна

$$F = \frac{3}{4\sqrt{7}} \left(\frac{7}{8}\right)^4 \frac{\pi\mu_0^2 I_0^2 r^2}{R^3} \chi = A_2 I_0^2. \quad (16)$$

В данном случае сила, действующая на снаряд, пропорциональна квадрату силы тока, поэтому воспользоваться ранее полученным результатом (9) нельзя.

Запишем уравнение второго закона Ньютона для рассматриваемого снаряда

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = A_2 I_0^2. \quad (17)$$

Из этого уравнения следует, что за малый промежуток времени Δt скорость снаряда увеличивается на величину

$$\Delta v = \frac{A_2}{m} I_0^2 \Delta t. \quad (18)$$

Теперь заметим, что величина $I_0^2 \Delta t$ входит в выражение для количества теплоты, выделяющейся в кольце. Действительно, по закону Джоуля-Ленца это количество теплоты равно

$$\delta Q = I_0^2 Y \Delta t. \quad (19)$$

Теперь уравнение (18) можно переписать в виде

$$\Delta v = \frac{A_2}{mY} \delta Q. \quad (20)$$

Таким образом, скорость, которую приобретет снаряд, пропорциональна количеству теплоты, выделившейся в кольце за время прохождения тока, которое в свою очередь, равно энергии запасенной в конденсаторе $Q = \frac{CU_0^2}{2}$. Поэтому скорость снаряда рассчитывается по формуле

$$v_{\max} = \frac{A_2}{mY} Q = \frac{3}{4\sqrt{7}} \left(\frac{7}{8}\right)^4 \frac{\pi \mu_0^2 r^2 \chi CU_0^2}{R^3 2mY} = \frac{3}{8\sqrt{7}} \left(\frac{7}{8}\right)^4 \frac{\pi \mu_0^2 r^2 \chi CU_0^2}{R^3 2mY}. \quad (21)$$

На первый взгляд, в данном рассмотрении где-то содержится ошибка – если энергия конденсатора все перейдет в тепловую, то откуда возьмется кинетическая энергия у снаряда? Разрешение сделанного парадокса заключается в сделанной оговорке – «индуктивностью кольца пренебречь». В реальной ситуации при строгом расчете необходимо учитывать обратное влияние силы тока в снаряде на кольцо. Так как этот ток изменяется, то в кольце будет возникать ЭДС индукции, которая будет влиять на силу тока в нем. Именно благодаря этому явлению, ток в кольце совершит большую работу, которая и пойдет на увеличение кинетической энергии снаряда. Мы же считаем, что эта энергия мала, по сравнению с начальной энергией конденсатора.

2.3 Не зависимо от направления силы тока в кольце снаряд полетит в сторону центра кольца.

Часть 3. Снаряд – катушка индуктивности.

3.1 Сначала найдем, какой ток индуцируется в катушке снаряда. Так электрическим сопротивлением катушки можно пренебречь, то в любой момент времени сумма ЭДС самоиндукции и ЭДС индукции, возникающей благодаря изменению внешнего поля равна нулю

$$-L \frac{\Delta i}{\Delta t} - \pi r^2 \frac{\Delta B_z}{\Delta t} = 0. \quad (22)$$

Из этого уравнения следует, что сила тока в катушке снаряда пропорциональна индукции магнитного поля кольца

$$L \frac{\Delta i}{\Delta t} = -\pi r^2 \frac{\Delta B_z}{\Delta t} \Rightarrow i(t) = -\frac{\pi r^2}{L} B_z(t). \quad (23)$$

Знак минус указывает, что ток в катушке направлен противоположно току в кольце (что также следует из правила Ленца). Следовательно, снаряд будет отталкиваться от кольца. В

остальном, решение этой части задачи полностью совпадает с решением предыдущей. Достаточно заметить, что в данной части коэффициент пропорциональности χ равен

$$\chi = -\frac{\pi r^2}{L}, \quad (24)$$

и подставить его в окончательный результат. Поэтому модуль максимальной скорости снаряда равен

$$v_{\max} = \frac{3}{8\sqrt{7}} \left(\frac{7}{8}\right)^4 \frac{\pi \mu_0^2 r^2 CU_0^2}{R^3 2mY} \cdot \frac{\pi r^2}{L} = \frac{3}{8\sqrt{7}} \left(\frac{7}{8}\right)^4 \frac{\pi^2 \mu_0^2 r^4 CU_0^2}{R^3 2mYL}. \quad (25)$$

3.2 При любом подключении батареи конденсаторов снаряд будет двигаться от центра катушки, убежать от нее!