

### 1.4. Баллистическое движение.

При движении тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту, зависимость радиус-вектора  $\vec{r}$  тела от времени имеет вид

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2.$$

Систему координат обычно выбирают так, что ось  $Ox$  направлена горизонтально в направлении броска (чтобы угол  $\alpha$  лежал в пределах от  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$ ), а ось  $Oy$  – по вертикали вверх.

Тогда

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha; \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt;$$

$$x(t) = (v_0 \cos \alpha)t + x_0; \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t + y_0.$$

Направление координатных осей может быть и иным, но тогда может измениться и вид выражений для координат и проекций скорости на координатные оси.

Во всех задачах этого раздела сопротивление воздуха считается пренебрежимо малым, ускорение свободного падения  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

1.84<sup>1</sup>. Камень, брошенный горизонтально с отвесного обрыва высотой  $h = 10 \text{ м}$ , упал на расстоянии  $S = 14 \text{ м}$  от основания обрыва. Получите уравнение траектории камня  $y(x)$  и определите из него начальную скорость камня  $v_0$ .

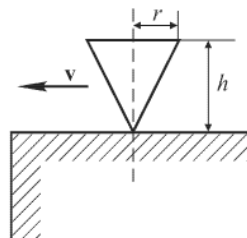
1.85<sup>1</sup>. Тело, брошенное с башни в горизонтальном направлении со скоростью  $v_0 = 20 \text{ м/с}$ , упало на землю на расстоянии  $S$  от основания башни, в два раза больше, чем высота башни  $h$ . Найдите высоту башни.

1.86<sup>2</sup>. Пистолетная пуля пробила два вертикально закрепленных листа бумаги, расстояние между которыми  $L = 30 \text{ м}$ . Пробоина во втором листе оказалась на  $h = 10 \text{ см}$  ниже, чем в первом. Определите скорость  $v$  пули в момент пробивания первого листа, считая, что в этот момент пуля двигалась горизонтально.

1.87<sup>2</sup>. Камень, брошенный с крыши дома горизонтально с начальной скоростью  $v_0 = 15 \text{ м/с}$ , упал на землю под углом  $\beta = 60^\circ$  к горизонту. Какова высота  $h$  дома?

1.88<sup>2</sup>. Тело брошено горизонтально. Через время  $t = 5 \text{ с}$  после броска направления полной скорости  $v$  и полного ускорения  $a$  составили угол  $\beta = 45^\circ$ . Найдите величину  $v$  скорости тела в этот момент.

1.89<sup>3</sup>. По гладкому горизонтальному столу движется, быстро вращаясь, волчок, имеющий форму конуса (см. рисунок). При какой скорости  $v$  поступательного движения волчок, соскочив со стола, не ударится о его край? Ось волчка все время остается вертикальной. Высота оси конуса равна  $h$ , радиус основания конуса  $r$ .



К задаче 1.89

1.90<sup>3</sup>. С обрыва в горизонтальном направлении бросают камень со скоростью  $v_0 = 20 \text{ м/с}$ . Определите координаты точки, в которой радиус кривизны траектории в 8

раз больше, чем в ее верхней точке. Камень бросают из начала координат в направлении оси  $Ox$ , ось  $Oy$  направлена вертикально вниз.

1.91<sup>2</sup>. Тело брошено с отвесного обрыва высотой  $h$  с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту.

а) На каком расстоянии  $S$  от основания обрыва тело упадет на землю?

б) В течение какого времени  $T$  оно будет находиться в воздухе?

в) Чему равна скорость тела  $v$  спустя время  $t$  после начала движения и какой угол  $\beta$  составляет она с горизонтом?

1.92<sup>3</sup>. Два человека играют в мяч, бросая его друг другу. Какой наибольшей высоты достигает мяч во время игры, если от одного игрока к другому он летит  $t = 2 \text{ с}$ ?

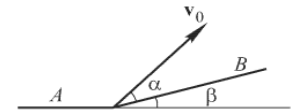
1.93<sup>3</sup>. Начальная скорость тела, бросаемого под некоторым углом к горизонту, равна  $v_0$ ; максимально возможная дальность его полета –  $S_{\text{max}}$ . Под каким углом  $\alpha$  к горизонту с той же начальной скоростью должно быть брошено тело, чтобы дальность его полета была равна  $S$  ( $S < S_{\text{max}}$ )?

1.94<sup>2</sup>. Под каким углом  $\alpha$  к горизонту должна быть направлена струя воды, чтобы дальность ее полета была максимальной?

1.95<sup>2</sup>. Под каким углом  $\alpha$  к горизонту нужно направить струю воды, чтобы высота ее подъема была равна дальности?

1.96<sup>2</sup>. Под каким углом  $\alpha$  к горизонту надо бросить тело, чтобы максимальная высота его подъема равнялась дальности полета, если попутный ветер сообщает телу постоянное горизонтальное ускорение  $a$ ?

1.97<sup>3</sup>. Из миномета, находящегося в точке  $A$ , ведут обстрел объекта, расположенного на склоне горы (см. рисунок). Угол наклона горы к горизонту равен  $\beta$ , стрельба



К задаче 1.97

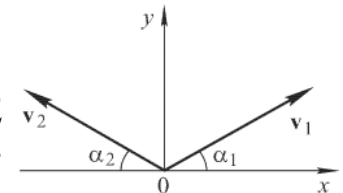
производится под углом  $\alpha$  к горизонту. На каком расстоянии  $L = AB$  будут падать мины, если их начальная скорость равна  $v_0$ ? При каком угле  $\alpha = \alpha_0$  дальность стрельбы вдоль склона будет максимальной?

1.98<sup>2</sup>. Камень, брошенный под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту, дважды побывал на одной высоте  $h$  спустя время  $t_1 = 3 \text{ с}$  и  $t_2 = 5 \text{ с}$  после начала движения. Найдите начальную скорость камня  $v_0$  и высоту  $h$ .

1.99<sup>2</sup>. В момент выстрела яблоко начинает падать с ветки дерева с нулевой начальной скоростью. Поразит ли его пуля, если ружье при выстреле было направлено прямо на яблоко?

1.100<sup>2</sup>. Из отверстия шланга, прикрытого пальцем садовника, бьют сразу две струи с одинаковой начальной скоростью  $v_0$ , направленные под углами  $\alpha$  и  $\beta$  к горизонту. Струи расположены в одной вертикальной плоскости. На каком расстоянии  $L$  по горизонтали от отверстия шланга струи пересекутся?

1.101<sup>2</sup>. Из одной точки одновременно выброшены два тела с одинаковыми по модулю скоростями  $v_1$  и  $v_2$  ( $|v_1| = |v_2| = v_0$ ) под углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  к горизонту (см. рисунок). Чему равна скорость и относительного движения тел? Как зависит от времени расстояние  $S$  между телами? Траектории обоих тел принадлежат одной вертикальной плоскости.



К задаче 1.101

1.102<sup>3</sup>. Мальчик в состоянии сообщить мячу начальную скорость  $v_0 = 20$  м/с. Какова максимальная дальность полета мяча в спортивном зале, высота которого  $h = 5$  м?

1.103<sup>3</sup>. Шарик бросают под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0 = 14$  м/с. На расстоянии  $S = 11$  м от точки бросания шарик упруго ударяется о вертикальную стенку. На каком расстоянии  $L$  от стенки шарик упадет на землю?

1.104<sup>3</sup>. Начальная скорость брошенного камня  $v_0 = 10$  м/с. Спустя  $t = 0,5$  с скорость камня становится равной  $v = 7$  м/с. На какую максимальную высоту  $H$  над начальным уровнем поднимется камень?

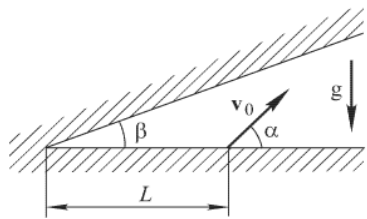
1.105<sup>3</sup>. С высоты  $h$  на наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол  $\alpha$ , свободно падает мяч и упруго отскакивает от нее. Через какое время  $t$  после удара мяч снова упадет на наклонную плоскость? Найдите расстояние от места первого удара до второго, от второго до третьего и т.д.

1.106<sup>3</sup>. Пикирующий самолет сбрасывает бомбу с высоты  $h$  и поражает цель, удаляющуюся по земле со скоростью  $v_2$ . На каком расстоянии  $S$  по горизонтали от цели была сброшена бомба, если в этот момент времени скорость самолета  $v_1$  была направлена под углом  $\alpha$  к горизонту?

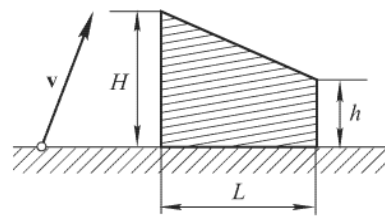
1.107<sup>3</sup>. Тело бросают с высоты  $h = 4$  м вверх под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту так, что к поверхности земли оно подлетает под углом  $\beta = 60^\circ$ . Какое расстояние по горизонтали пролетит тело?

1.108<sup>3</sup>. Необходимо с земли перебросить мяч через вертикальную стенку высоты  $h$ , находящуюся на расстоянии  $S$  от места броска. При какой наименьшей начальной скорости  $v_0$  это возможно? Под каким углом  $\alpha$  к горизонту должна быть в этом случае направлена начальная скорость мяча?

1.109<sup>3</sup>. Орудие стреляет из-под укрытия, наклоненного к горизонту под углом  $\beta$ , находясь на расстоянии  $L$  от основания укрытия. Ствол орудия закреплен под углом  $\alpha$  к горизонту, причем  $\alpha > \beta$  (см. рисунок). С какой максимальной скоростью может вылететь снаряд, не задев укрытия? Сопротивление ему воздуха пренебречь. Траектория снаряда лежит в плоскости чертежа.



К задаче 1.109



К задаче 1.110.

1.110<sup>4</sup>. При какой минимальной начальной скорости мальчик может перебросить камень через дом с покатой крышей (см. рисунок), если ближайшая к мальчику стена имеет высоту  $H$ , задняя стена – высоту  $h$ , а ширина дома равна  $L$ ?

**Ответы:**

**1.4. Баллистическое движение.**

1.84.  $y(x) = h - \frac{gx^2}{2v_0^2}$ ;  $v_0 = S\sqrt{\frac{g}{2h}} = 9,8$  м/с.

1.85.  $h = \frac{v_0^2}{2g} = 20,4$  м.

1.86.  $v = L\sqrt{\frac{g}{2h}} = 210$  м/с.

1.87.  $h = \frac{v_0^2 tg^2 \beta}{2g} \approx 34,4$  м/с.

1.88.  $v = gt\sqrt{2} \approx 69,3$  м/с.

1.89.  $v \geq \sqrt{\frac{r^2 g}{2h}}$ .

1.90.  $x = \frac{v_0^2 \sqrt{3}}{g} = 71$  м;  $y = \frac{3v_0^2}{2g} = 61$  м (считая начало координат расположенным

в точке вылета).

1.91. а)  $S = \frac{v_0 \cos \alpha (v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh})}{g}$ ; б)  $T = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}$ ;

в)  $v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g \tau \sin \alpha + g^2 \tau^2}$ ;  $tg \beta = \frac{|v_0 \sin \alpha - g \tau|}{v_0 \cos \alpha}$ .

1.92.  $h_{\max} = \frac{gt^2}{8} = 4,9$  м.

1.93.  $\alpha_1 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{gS}{v_0^2}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$ .

1.94.  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

1.95.  $\alpha = \arctg 4 \approx 76^\circ$ .

1.96.  $\alpha = \arctg \left( \frac{1}{4} - \frac{a}{g} \right)$ .

1.97.  $L = \frac{2v_0^2 \sin(\alpha - \beta) \cos \alpha}{g \cos^2 \beta}$ ;  $\alpha_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$ .

1.98.  $v_0 = \frac{g(t_1 + t_2)}{2 \sin \alpha} = 78,4$  м/с;  $h = \frac{1}{2} g t_1 t_2 = 73,5$  м.

1.99. Да.

1.100.  $L = \frac{2v_0^2}{g(tg \alpha + tg \beta)}$ .

1.101.  $u = 2v_0 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ ;  $S(t) = 2v_0 t \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ .

$$1.102. L_{\max} = \frac{2\sqrt{2gh(v_o^2 - 2gh)}}{g} \approx 35 \text{ м.}$$

$$1.103. L = \frac{v_o^2}{g} \sin 2\alpha - S \approx 6,3 \text{ м.}$$

$$1.104. H = \frac{(v_o^2 - v^2 + g^2 t^2)^2}{8g^3 t^2} = 3,0 \text{ м.}$$

$$1.105. t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}; S_1 = 8hs \sin \alpha; S_1 : S_2 : S_3 = 1 : 2 : 3.$$

$$1.106. S = \frac{v_1 \cos \alpha - v_2}{g} \left( \sqrt{v_1^2 \sin^2 \alpha + 2gh} - v_1 \sin \alpha \right).$$

$$1.107. L = \frac{2h}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha} = 10,9 \text{ м.}$$

$$1.108. v_o = \sqrt{g(\sqrt{S^2 + h^2} + h)}; \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{h}{S}.$$

$$1.109. v_{\max} = \frac{\sqrt{2gL \operatorname{tg} \beta}}{\cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}.$$

$$1.110. v_{\min} = \sqrt{g \left( \sqrt{(H-h)^2 + L^2} + H + h \right)}.$$