МЕХАНИКА

1.1. Векторы и скаляры

Скалярами (скалярными величинами) называются величины, характеризуемые только численным значением; векторами (векторными величинами) – величины, характеризуемые не только численным значением, но и направлением в пространстве.

Длина (модуль) вектора $\vec{a}$ обозначается как $|\vec{a}| = a$. Единичным называется вектор, длина которого равна единице; нулевым – длина которого равна нулю; направление нулевого вектора считается неопределенным. Два вектора считают равными, если их модули равны и направления совпадают.

Если $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы, направленные вдоль осей *Ox*, *Oy*, *Oz* прямоугольной декартовой системы координат (в их положительном направлении), то любой вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

где числа a_x, a_y, a_z называют декартовыми координатами вектора $\vec{a}$; единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ называют ортами координатных осей *Ox*, *Oy*, *Oz*.

Любой вектор однозначно определен своими декартовыми координатами. Если $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, то для вектора а может быть использовано обозначение. Операции $a = \{a_x, a_y, a_z\}$ над векторными величинами удобно производить с использованием декартовых координат. В частности, если $a = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $b = \{b_x, b_y, b_z\}$, а α и β – скалярные величины, то

$$\alpha a = \{\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z\},$$

$$a + b = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\};$$

в общем случае

$$\alpha a + \beta b = \{\alpha a_x + \beta b_x, \alpha a_y + \beta b_y, \alpha a_z + \beta b_z\}.$$

Скалярное произведение векторов $a = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $b = \{b_x, b_y, b_z\}$ равно

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \equiv (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = \cos\varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

где φ – угол между направлениями векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

1.1[1]. Как направлены два вектора, модули которых одинаковы и равны *a*, если модуль их суммы равен: *а*) 0; *б*) 2*a*; *в*) *a*; *г*) $a\sqrt{2}$; *д*) $a\sqrt{3}$?

1.2[1]. Если $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ ориентации векторов, то что можно сказать о взаимной ориентации векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, если: *а*) $a = a_1 + a_2$; *б*) $a^2 = a_1^2 + a_2^2$; *в*) $a_1 + a_2 = a_1 - a_2$?

1.3[1]. Вектор $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$. Какова должна быть скалярная величина *c*, чтобы $|c\vec{a}| = 7{,}5$?

1.4[1]. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ имеют прямоугольные декартовы координаты {6, 0, 2} и {1, 4, 3} соответственно. Найдите вектор $\vec{a}_3$ такой, что: *а*) $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = 0$; *б*) $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = 0$.

1.5[1]. Посыльный проходит 30 м на север, 25 м на восток, 12 м на юг, а затем в здании поднимается на лифте на высоту 36 м. Чему равны пройденный им путь *S* и перемещение *L*?

1.6[1]. Угол α между двумя векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{b}$ равен 60°. Определите длину вектора $c = \vec{a} + \vec{b}$ и угол β между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$. Величины векторов равны *a* = 3,0 и *b* = 2,0.

1.7[1]. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, определенных в предыдущей задаче, найдите длину вектора $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ угол γ между $\vec{a}$ и $\vec{d}$.

1.8[2]. Найдите проекцию вектора $\vec{a} = 4{,}0\vec{i} + 7{,}0\vec{j}$ на прямую, направление которой составляет угол α = 30° с осью *Ox*. Вектор $\vec{a}$ и прямая лежат в плоскости *xOy*.

1.9[2]. Известно, что $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Векторы $\vec{d}$ и $\vec{c}$ заданы графически, известны также прямые *MN* и M_1N_1, вдоль которых направлены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 1). Найдите построением векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

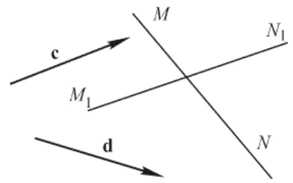

Рис. 1

1.10[2]. На координатной плоскости *xOy* графически заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 2). Найдите длины векторов $\vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{c}_2 = \vec{a} - \vec{b}$.

1.11[2]. Вектор $\vec{a}$ составляет угол α = 30° с прямой *AB*, *a* = 3,0. Под каким углом β к прямой *AB* нужно направить вектор $\vec{b}$ ($b = \sqrt{3}$), чтобы вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ был параллелен *AB*? Найдите длину вектора $\vec{c}$.

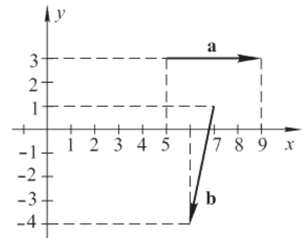

Рис. 2

1.12[1]. Заданы три вектора: $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j}$. Найдите *а*) $\vec{a} + \vec{b}$; *б*) $\vec{a} + \vec{b}$; *в*) $(\vec{a}, \vec{b})$; *г*) $(\vec{a}, \vec{c})\vec{b} - (\vec{a}, \vec{b})\vec{c}$.

1.13[2]. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α = 60°, *a* = 2,0, *b* = 1,0. Найдите длины векторов $\vec{c} = (\vec{a}, \vec{b})\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = 2\vec{b} - \vec{a}/2$.

1.14[2]. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, если *a* = {2, 1, –5} и *b* = {5, –5, 1}.

1.15[2]. Найдите угол α между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если *a* = {1, 2, 3}, *b* = {3, 2, 1}.

1.16[2]. Вектор $\vec{a}$ составляет с осью *Ox* угол α = 30°, проекция этого вектора на ось *Oy* равна a_y = 2,0. Вектор $\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$ и *b* = 3,0 (см. рис. 3). Вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Найдите: *а*) проекции вектора $\vec{b}$ на оси *Ox* и *Oy*; *б*) величину *c* и угол β между вектором $\vec{c}$ и осью *Ox*; *в*) ($\vec{a}$, $\vec{b}$); *г*) ($\vec{a}$, $\vec{c}$).

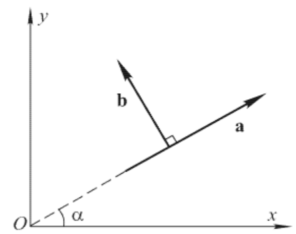

Рис. 3

Ответы:

1.1. Векторы и скаляры.

1.1. Угол α между векторами равен: а) 180°; б) 0; в) 120°; г) 90°; д) 60°.

1.2. *а)* $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$; *б)* $\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$; *в)* $\vec{a}_2$ – нулевой вектор.

1.3. $c = \pm 1,5$.

1.4. *а)* $\vec{a}_3 = \{-7; -4; -5\}$; *б)* $\vec{a}_3 = \{-5; 4; 1\}$.

1.5. $S = 103$ м, $L = 47,4$ м.

1.6. $c \approx 4,4$; $\beta \approx 41°$.

1.7. $d \approx 2,6$; $\gamma \approx 41°$.

1.8. $a_1 = a_x \cos\alpha + a_y \sin\alpha \approx 7,0$.

1.10. $c_1 \approx 5,8$; $c_2 \approx 7,1$.

1.11. $\beta = 300°$; $c = 3,5$.

1.12. *а)* $5i + j$; *б)* $i + 3j - 2k$; *в)* $15i - 18j + 9k$.

1.13. $c = 2,6$; $d = 1,7$.

1.15. $\alpha = 44,4°$.

1.16. *а)* $b_x = -1,5$; $b_y = 2,6$; *б)* $c = 5$; $\beta \approx 67^o$; *в)* 0; *г)* 16,0.